《数学大观》

十四、刘徽的“割圆术”

——无穷小分割和极限方法

主 讲 人 ： 青 课

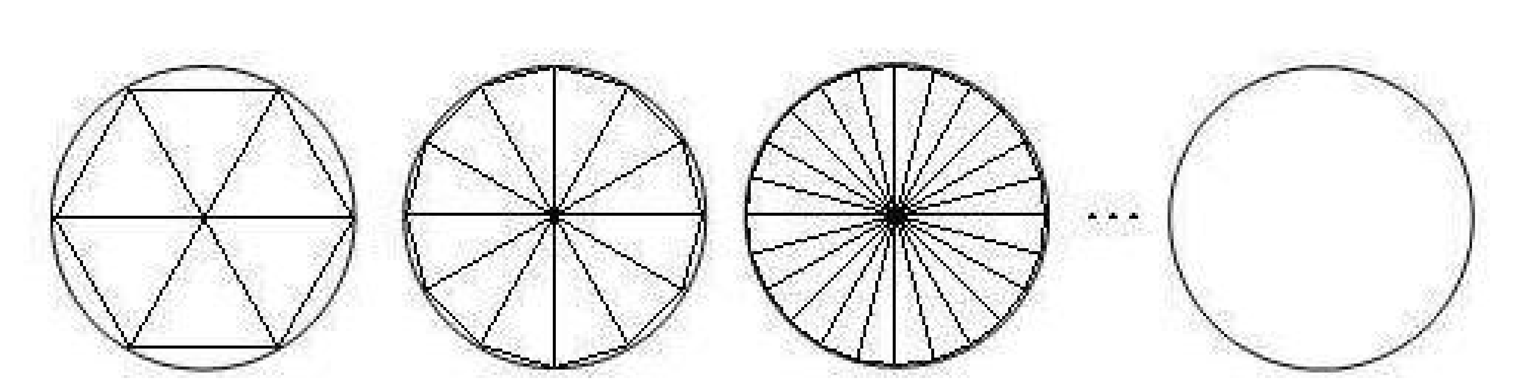
刘徽首创“割圆术”，证明了圆面积的精确公式，在此基础上开创了求圆周率的科学方法，是无穷小分割和极限方法的完美结合，从而建立了通向微积分的门槛。

01

证明圆面积公式

刘徽从圆内接正6边形开始割圆，得到正12边形，以圆内接正6边形每边长乘半径再３倍，可计算出圆内接正12边形的面积。再割成正24边形并计算出其面积。刘徽说：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”



如此继续下去，对于这个正6×2^n（$n=0$，1，2，3，…）边形序列，设S_n是 6×2^n边形的面积，L_n是每边长，割得越细，即n越大，$S_圆-S_n$就越小，割至不可割时，则**圆内接正多边形便与圆周合为一体**，这实质上证明了：

$$\lim_{n\to\infty} 6\times2^n L_n = L$$

此时，$\lim\limits_{n\to\infty} (S_圆 - S_n) = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S_圆$

接着，刘徽指出，每一次分割中，圆内接正多边形的每边与圆周之间都有一个余径Rn，若将所有边长乘以余径Rn加到正多边形面积上去，则其和又大于圆面积，即：

$$S_n < S_{圆} < S_{n-1} + 2\left(S_n - S_{n-1}\right)$$

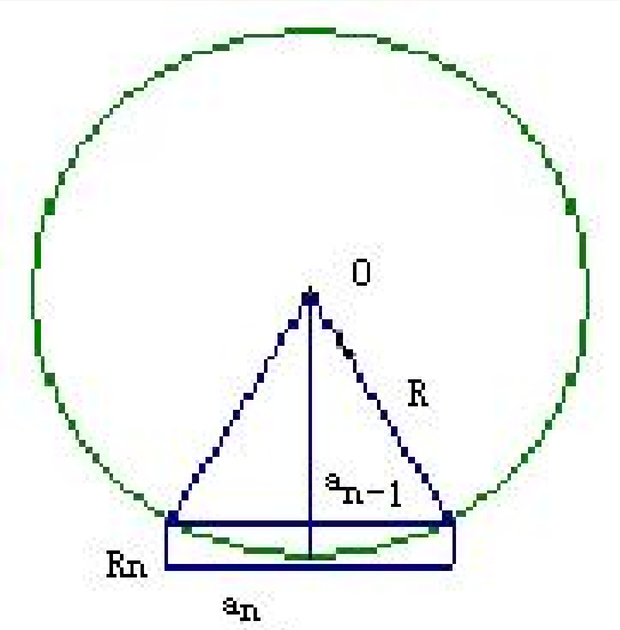
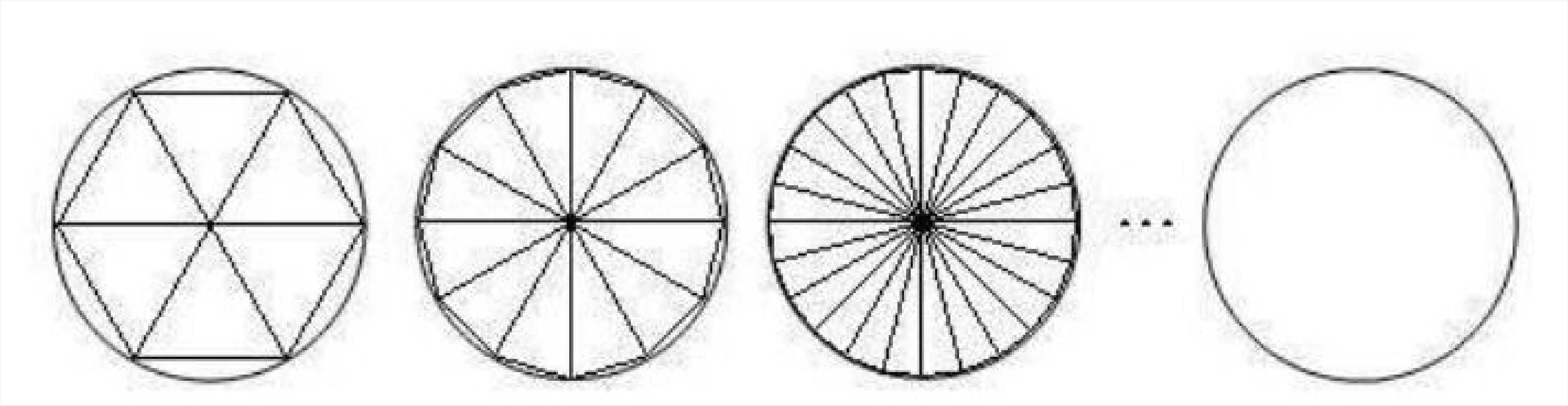


图4－2

但随着“割之又割”，余径R_n越来越小，即$n\to\infty$时，$R_n\to 0$有：

$$\lim_{n\to\infty}[S_{n-1}+2(S_n-S_{n-1})]=S_{圆}$$



最后，刘徽“觚而裁之”，每一小三角形面积（设为A）等于这一小三角形底边长（设为l*）乘半径R的一半：$A=\frac{1}{2}l^*R$

圆的面积S圆等于这无穷多个小三角形的面积之总和，即：

$$S_{圆}=\sum_{1}^{\infty}A=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}l^*R=\frac{1}{2}LR$$

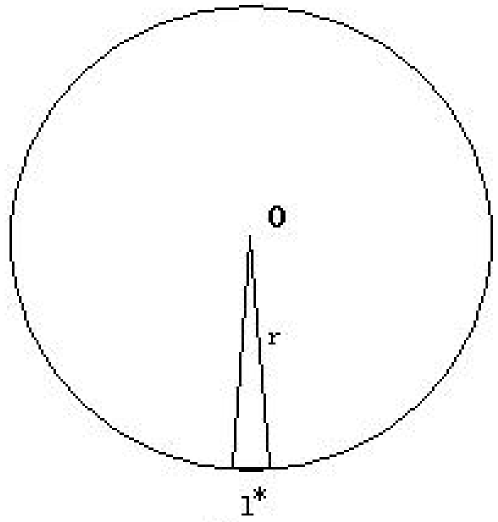


图4-3

刘徽指出，本公式中的周、径“谓至然之数，非周三径一之率也。”因此，刘徽这里的“至然之数”，就是圆周率。

$$S_{\text{圆}}=\sum_{1}^{\infty}A=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}l^{*}R=\frac{1}{2}LR$$

02

科学推求圆周率π

刘徽的“割圆术”的意义

不仅证明了圆面积的精确公式，

而且开创了求圆周率的科学方法。

刘徽取直径为2尺的圆，因此圆内接正6边形边长为1尺，按从圆内接正6边形开始割圆程序，得到一个正6×2^n边形序列（n=0，1，2，…），从中可以发现明显的循环语句和子程序的思想，“割圆术”是一种典型的计算机循环语句。

刘徽的程序是完全同样的计算12，24，48，96边形边长（觚面）的程序，是一个典型的循环语句的例子“Do I=1 to N”①。

循环、递推公式：

$$d_{3\times 2^n}=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_{3\times 2^n}}{2}\right)^2}$$

$$R_{3\times 2^n}=R-d_{3\times 2^n}=R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_{3\times 2^n}}{2}\right)^2}$$

$$a_{3\times 2^{n+1}}=\sqrt{\left(R_{3\times 2^n}\right)^2+\left(\frac{a_{3\times 2^n}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left[R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_{3\times 2^n}}{2}\right)^2}\right]^2+\left(\frac{a_{3\times 2^n}}{2}\right)^2}$$

$$S_{3\times 2^{n+2}}=3\times 2^{n+2}\times\left(a_{3\times 2^{n+1}}\times R\right)$$

若按R=1，从a6=1开始，根据这套公式便可循环递推地依次计算出n=1，2，3…时相应的 $S_{3\times 2^{n+2}}$ 值来。

每一循环程序中的

$$a_{3\times 2^{n+1}}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_{3\times 2^{n}}^{2}}}$$

$$S_{3\times 2^{n+2}}=3\times 2^{n}\times\sqrt{2-\sqrt{4-a_{3\times 2^{n}}^{2}}}$$

所以每次的 $3\times 2^{n}\times\sqrt{2-\sqrt{4-a_{3\times 2^{n}}^{2}}}$ 可作为π的近似值。

要计算得多么精确，只要令倍边次数k足够大即可

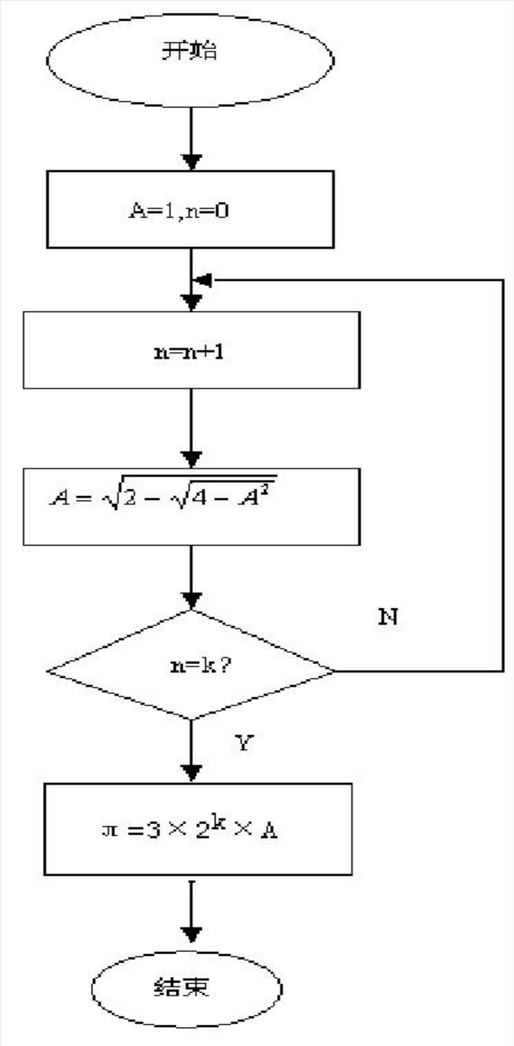


图 4- 4

按刘徽的术文，他算出a_{96}（取$A=1$，$k=4$）和S_{96}，S_{192}，可求得圆周率$\pi=\frac{157}{50}$，又依次求出a_{1536}（取$k=8$），进而求出S_{3072}，从而验证了对数值进行调整后的更密合的值$\frac{3927}{1250}$，从而得出$\pi\approx\frac{3927}{1250}=3.1416$这一更精确的数据。

按照上述刘徽的割圆程序框图，只要取$n=11$算出a_{12288}和S_{24576}，就能达到所谓祖冲之7位有效数字的圆周率数值。

元代的赵友钦在其《革象新书》中则从圆内接正方形开始起算，运用与刘徽相类似的方法算出a_{16384}，从而验证了祖氏密率π的精确性。

祖冲之在世界数学史上第一次将圆周率[π]值计算到小数点后七位，这一密率值是世界上最早提出的，比欧洲早一千多年，所以有人主张叫它“祖率”。

感谢聆听